МОДЕЛЬ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА В НЕЧЕТКОЙ ПОСТАНОВКЕ

А. С. Гузаревич

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь

Научный руководитель М. В. Задорожнюк

Одной из наиболее сложных задач макроэкономики является увеличение эффективности ведения многоотраслевого хозяйства. Для решении это задачи необходимо обеспечить объем производства каждой отрасли, который удовлетворял бы все потребности в продукции этой отрасли. При этом нужно учитывать и тот факт, что каждая отрасль выступает и как производитель, и как потребитель продукции, произведенной и в своей отрасли, и в других отраслях. Для решения этой задачи в 1936 г. американским экономистом В. В. Леонтьевым была разработана модель многоотраслевой экономики, суть которой состоит в следующем.

Рассмотрим n отраслей экономики, каждая из которых производит свой определенный товар. Введем следующие обозначения: x_i – общий (валовой) объем i-й отрасли производства, $i = 1, 2, \ldots, n$; x_{ij} – объем продукции, произведенной i-й отраслью и потребляемой j-ой отраслью; y_i – объем конечного продукта iой отрасли.

Так как балансовый принцип связи отраслей производства заключается в том, что количество продукции, произведенной i-й отраслью, должно быть равно количеству продукции, потребляемой в производственной и непроизводственной сферах в сумме, то соотношения баланса примут вид:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

В. В. Леонтьев заметил, что отношения $\frac{x_{ij}}{x_j}$ при фиксированных i и j остаются одинаковыми на протяжении определенного промежутка времени, что объясняется, с экономической точки рения, примерным постоянством технологии производства в течение данного периода. В связи с этим можно считать, что отношение $\frac{x_{ij}}{x_j}$ является технологической константой, характеризующей затраты i-ой отрасли на производство единицы продукции j-й отрасли, обозначаемой a_{ij} и называемой коэффициентом прямых затрат. Следовательно,

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j, \text{ где } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

С учетом соотношений баланса (1) имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n + y_1, \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n + y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n + y_n. \end{cases} \tag{3}$$

Введя в рассмотрение матрицы X – вектор валового (общего) производства, Y – вектор конечного потребления и A – матрицу прямых затрат, систему (3) можно переписать в матричном виде:

$$X = AX + Y, \tag{4}$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Уравнение межотраслевого баланса (4) легко преобразовать к виду $(E - A)X = Y$ и решить средствами матричной алгебры. Окончательно имеем:

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y. \tag{5}$$

По формуле (5) мы можем определить вектор валового производства X при известных постоянных значениях прямых затрат A и определенном необходимом векторе конечного потребления Y [1].

Из прикладного характера задачи вытекает неотрицательность элементов матрицы A и векторов X и Y. Неотрицательная матрица A называется продуктивной, если существует такой положительный вектор X, для которого выполнено неравенство $X > AX$. В этом случае и модель Леонтьева называется продуктивной.

Приведем некоторые из существующих критериев продуктивности матрицы A:

1. Матрица A с неотрицательными элементами продуктивна, если сумма всех элементов в любом ее столбце (строке) не превосходит единицы, причем хотя бы для одного столбца (строки) эта сумма строго меньше единицы.

2. Матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(E - A)^{-1}$ существует и ее элементы неотрицательны [1].

В настоящее время матричные модели, используемые в экономике, хорошо изучены и имеют широкое практическое применение. Однако на практике часто приходится принимать решения в условиях неполной и не совсем точной информации. Для этих целей была разработана теория нечетких множеств, с успехом применяемая сегодня в различных сферах науки и техники, в том числе и в экономике.

Введем некоторые понятия и определения, относящиеся к теории нечетких чисел.

Треугольным нечетким числом A называется тройка $\langle a, b, c \rangle$ $(a \le b \le c)$ действительных чисел, через которые его функция принадлежности м определяется следующим образом [2]:

$$\mu A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, \text{ если } x \in [a;b], \\ \dfrac{x-c}{b-c}, \text{ если } x \in [b;c], \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

На рис. 1 изображено нечеткое треугольное число $A = \langle 1, 5, 7 \rangle$, которое лингвистически можно интерпретировать как «около 5» или «приблизительно 5».

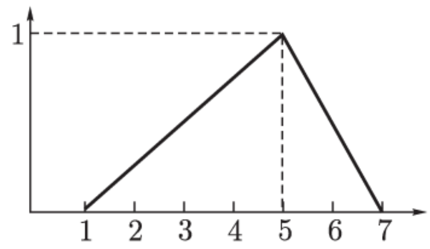

Рис. 1

Второе число b тройки $\langle a, b, c \rangle$ называют *модой*, или четким значением нечеткого треугольного числа. Числа a и c характеризуют степень «размытости» числа.

В общем случае при определении нечеткого треугольного числа не обязательно использовать линейные функции. Часто в различных приложениях используются две функции, из которых одна монотонно возрастает на интервале $[a;b]$, а другая монотонно убывает на интервале $[b;c]$.

Наибольшее распространение получили числа (L-R)-типа, определяемые тройкой (a, α, β), где a – мода числа, α и β – левый и правый коэффициенты нечеткости $(\alpha, \beta > 0)$. Например, число, изображенное на рис. 1, будет записано следующим образом: (5, 4, 2).

Пусть (a, α, β), (b, γ, δ) – нечеткие числа. Следуя [2], определим арифметические операции следующим образом:

– сложение: $(a, \alpha, \beta) + (b, \gamma, \delta) = (a+b, \alpha+\gamma, \beta+\delta)$; (6)

– вычитание: $(a, \alpha, \beta) - (b, \gamma, \delta) = (a-b, \alpha+\delta, \beta+\gamma)$; (7)

– умножение $(a, b > 0)$: $(a, \alpha, \beta) \cdot (b, \gamma, \delta) = (ab, a\gamma + b\alpha, a\delta + b\beta)$; (8)

– умножение $(a < 0, b < 0)$: $(a, \alpha, \beta) \cdot (b, \gamma, \delta) = (ab, -b\alpha - a\delta, -b\beta - a\gamma)$; (9)

– деление $(a, b > 0)$: $(a, \alpha, \beta) / (b, \gamma, \delta) = (a / b, b\alpha + a\delta, b\beta + a\gamma)$. (10)

Рассмотрим применение теории нечетких чисел на примере модели Леонтьева.

Пример. Для двухотраслевой экономической системы задана нечеткая матрица коэффициентов прямых материальных затрат $A = \begin{pmatrix} (0{,}3;\ 0{,}03;\ 0{,}05) & (0{,}2;\ 0{,}04;\ 0{,}05) \\ (0{,}5;\ 0{,}05;\ 0{,}03) & (0{,}2;\ 0{,}04;\ 0{,}05) \end{pmatrix}$ и нечеткий вектор конечной продукции $B = \begin{pmatrix} (200;\ 20;\ 20) \\ (300;\ 25;\ 25) \end{pmatrix}$. Найдем величину валовой продукции каждой из отраслей. Эти величины также будут являться нечеткими числами, для вычисления которых мы используем формулу (5), а также (6)–(10).

Матрица A является продуктивной согласно первому критерию. Построим матрицу $E-A=\begin{pmatrix} (0{,}7;\,0{,}05;\,0{,}03) & (-0{,}2;\,0{,}05;\,0{,}04) \\ (-0{,}5;\,0{,}03;\,0{,}05) & (0{,}8;\,0{,}05;\,0{,}04) \end{pmatrix}$. Тогда матрица $(E-A)^{-1}$ примет вид:

$$(E-A)^{-1}=\frac{1}{(0{,}46;\,0{,}106;\,0{,}082)}\begin{pmatrix} (0{,}8;\,0{,}05;\,0{,}04) & (0{,}2;\,0{,}04;\,0{,}05) \\ (0{,}5;\,0{,}05;\,0{,}03) & (0{,}7;\,0{,}05;\,0{,}03) \end{pmatrix},$$

откуда, согласно (5), $X=(E-A)^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix} (478{,}26;\,37{,}82;\,43{,}56) \\ (673{,}91;\,49{,}57;\,52{,}41) \end{pmatrix}$. Таким образом, для обеспечения заданного нечеткого объема конечной продукции первая и вторая отрасль должны произвести продукцию в объеме равном, соответственно, (478,26; 37,82; 43,56) и (673,91; 49,57; 52,41) условным единицам. Межотраслевые поставки и чистую продукцию каждой отрасли можно найти по формулам, соответственно, (2) и (1).

Литература

1. Модели межотраслевого баланса и сакроэкономической динамики. – Режим доступа: http://www.apmath.spbu.ru/ru/staff/kuzyutin.d/files/EMM_ch7_ Macroeconomic_Dynamics.pdf, свободный. – Загл. с экрана.
2. Конышева, Л. К. Основы теории нечетких множеств : учеб. пособие / Л. К. Конышева, Д. М. Назаров. – СПб. : Питер, 2011. – 192 с.